福岡県立大学人間社会学部紀要
2007, Vol. 16, No. 2, 15－27

Hénon-Heiles系におけるカオス軌道の統計的性質

石　崎　龍　二

要旨　保存力学系のカオス解をもつ微分方程式系としてよく知られているHénon-Heiles系のカオス軌道の統計的性質を数値解析により調べた。まず、位相空間内のカオス領域に初期点を取り、変数yの２時間相関関数を長時間平均により数値的に求めた。その結果、２時間相関関数は振動しながら０に漸近していく事がわかった。この数値的に求めた２時間相関関数の減衰形を評価するために、変数yの２時間相関関数と、変数yのパワースペクトルのピーク構造を使った指数型減衰関数と三角関数の積和とのフィッティングを最小二乗法により行った。その結果、エネルギー積分がE=1/10, 1/8, 7/48, 1/6のいずれの値に対しても、決定係数は0.6を超えており、あてはまりは良かった。エネルギー積分Eが大きくなるほど、指数型関数と三角関数の積和とのあてはまりが良くなる傾向がみられた。しかし、初期の時間範囲では、あてはまりが良いが、長時間後の時間範囲では、ずれが大きくなる傾向がみられた。次に、カオス軌道の初期値鋭敏性や軌道不安定性の時間的揺らぎを特徴づけるために、局所軌道拡大率の揺らぎを調べた。その結果、局所軌道拡大率の２時間相関関数には、時間tに関する逆べき型$t^{-(\beta-1)}$の長時間相関があることがわかった。これはカオス軌道が、カオスの海とKAMトーラスの島との境界領域へ長時間停滞することにより作り出されるものであると考えられる。
キーワード　保存力学系、カオス、２時間相関関数、パワースペクトル、リアプノフ指数、局所軌道拡大率

１．はじめに

保存力学系のカオスの研究は、決定論的な力学法則から予測不可能で不規則な変動が発生する仕組みや、熱力学第二法則を統計力学の立場から説明するエルゴード仮説が成り立つ根拠を考える上で重要である。

エルゴード仮説では、軌道は位相空間内の許された領域内をくまなく巡ることが仮定されるので、軌道に沿った長時間平均は、位相空間内の許された領域内にわたる位相平均と等しくなると考えることができる。

力学系の非線形性とエルゴード性との間には密接な関係がある。一般に、系に非線形性が入るとカオスが発生し、解析的に解くことが困難となる[1) 2)]。カオスが発生する力学系は、初期条件の

わずかな誤差が時間の経過とともに指数関数的に拡大される性質を持っているため、観測誤差をゼロとしない限り長時間後の解を予測することができない。従って、一般に非線形力学系の解の性質を調べるためにはコンピュータによる数値計算が必要である。数値計算による研究が行われる以前は、系にわずかでも非線形性があれば、エルゴード仮説が成り立つようなエネルギー等分配側が成立する熱平衡状態が実現されるのではないかと考えられていた。

1955年に、E. Fermi、J. Pasta、S. Ulamらは、複数の調和振動子を非線形結合させた系についての数値実験を行った。彼らは、エネルギーの第１モード（フーリエ成分）を励起し、他のモードにそれがどのように移るかを数値計算により分析した。その結果、予想に反してモード間のエネルギー交換は数個のモード間だけで起こり、系の振る舞いはほとんど周期的になる現象を発見した（FPU現象）[3]。また、A. N. Kolmogorov、V. I. Arnold、J. K. Moserらは、可積分系に非線形な摂動が加わってもそれが微小であれば、位相空間内の大部分のトーラス（周期軌道）は、変形は受けても破壊されずに残るとするKolmogorov-Arnold-Moser（KAM）の定理を証明した[4]。KAM定理は、ある摂動に対するトーラスが残るための条件を与えるものであり、摂動が加わった後に残るトーラスはKAMトーラスと呼ばれる。このように、系の非線形性とエルゴード性との関係は単純ではない。

保存力学系においてカオスが発生する場合の位相空間は、一般に規則的な運動をする領域（トーラスの島）と不規則的な運動をする領域（カオスの海）から構成される。カオス軌道は非周期軌道であるからカオスの海上をくまなく巡る。従って、カオスの海の領域では、エルゴード仮説が成り立つと考えられる。しかし、具体的なカオス軌道の統計性を解明するためには、解析的に解くことが困難なため数値計算が必要である。私は、これまで少数自由度の保存力学系におけるカオスの統計的な性質を、数値計算を使って調べてきた。その結果、少数自由度の保存力学系では、カオス軌道がトーラスの島とカオスの海の境界領域に停滞するため、種々の物理量に長時間相関があらわれることを示してきた[5) 6)]。しかし、保存力学系のカオス解をもつ微分方程式系の統計的な性質を調べるためには、カオス軌道の長時間相関があるため、非常に長い数値計算が必要である。そのため保存力学系のカオスの統計的な性質の研究は、まだ不十分である。

本稿では、保存力学系のカオス解をもつ微分方程式系として最もよく知られているHénon-Heiles系のカオス軌道の統計的性質を調べるために数値解析を行った。第２節でHénon-Heiles系の物理的な意味について紹介し、第３節でカオス時系列の２時間相関関数とパワースペクトルの数値計算結果を示し、２時間相関関数と、指数型減衰関数と三角関数の積和とのフィッティングを最小二乗法により行った結果を示す。第４節でカオス軌道の初期値鋭敏性を表すリアプノフスペクトルと局所軌道拡大率の揺らぎの数値計算結果を示し、第５節で今回の数値計算のまとめと課題について考察する。

２．Hénon-Heiles系

Hénon-Heiles系は、M. HénonとC. Heilesにより数値的に研究されたモデルである（1964年）[7]。Hénon-Heiles系のハミルトニアンHは、

次式で与えられる。

$$H=\frac{1}{2}\left(p_x^2+p_y^2\right)+U(x,y). \tag{1}$$

ポテンシャルU(x,y)は、次式で与えられる。

$$U(x,y)=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+2x^2y-\frac{2}{3}y^3\right). \tag{2}$$

位相空間上の状態変数は、$\vec{X}(t)=\{x(t),y(t),p_x(t),p_y(t)\}$である。

またこの系は、ある軸に対して対称なポテンシャル中での質量m[kg]の質点の運動を表すモデルとみることができる。対称軸をz軸、対称面内に原点をとる円筒座標を(r, θ ,z)とした場合のハミルトニアンH′は次式で与えられる（図１）。

$$H'=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+p_z^2\right)+\Phi(r,z). \tag{3}$$

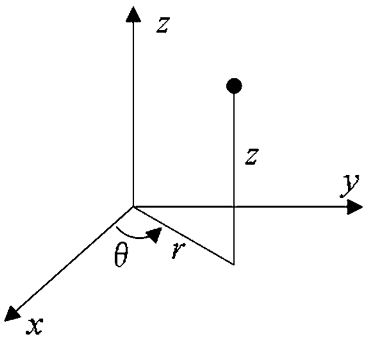

図１：直交座標(x,y,z)と円筒座標(r, θ ,z)

この系のエネルギー積分$I_1=E$と角運動量の積分$I_2=p_\theta=mr^2\dot{\theta}=\ell$は、時間的に変化しない保存量であるため、⑶式から$p_\theta$を消去すると、

$$H'=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+p_z^2\right)+U'(r,z), \tag{4}$$

$$U'(r,z)=\frac{1}{2m}\frac{\ell^2}{r^2}+\Phi(r,z) \tag{5}$$

となる。従って、⑷式のハミルトニアンは、m=1に規格化した時、⑴式と同じ４変数からなる形式となっており、軸対称なポテンシャル中での質点の運動は、実空間でみれば、２次元平面上での運動とみなすことができる。ポテンシャルU’(r,z)をz=0,r=rc（円軌道の平衡位置）のまわりでテイラー展開をし、その低次の項まで考えた場合の特別な関数形が⑵式となっていることがわかる。

Hénon-Heiles系のエネルギー積分$I_1=E$は、時間的に変化しない保存量である。従って、$\{x(t),y(t),p_x(t),p_y(t)\}$の内３つの変数の値が決まれば、すべての変数の値が決まるので、軌道は位相空間上でE=一定の条件を満足する３次元領域内に束縛される。もし、I_1の他にもう１つの保存量が存在すれば、軌道は２次元領域内に局在する。

⑴式のハミルトニアンHより、$\vec{X}(t)$の時間発展方程式は、次式より与えられる。

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{p}_x\\ \dot{p}_y\end{bmatrix}=\vec{F}\left(\vec{X}(t)\right)=\begin{bmatrix}\partial H/\partial p_x\\ \partial H/\partial p_y\\ -\partial H/\partial x\\ -\partial H/\partial y\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}p_x\\ p_y\\ -x\\ -y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -2xy\\ -x^2+y^2\end{bmatrix}. \tag{6}$$

本稿で行った方程式⑹の数値積分では、Runge-Kutta法で、長時間の計算を行うとエネルギー誤差が大きくなってしまう危険があるため、エネルギー誤差を一定の範囲に抑えることができるシンプレクティック数値解法を採用した[8) 9)]。

図２は、ポテンシャルU(x,y)の等高線図である。エネルギー積分が$E=E_c(=1/6)$以下であれば、Hénon-Heiles系の軌道は有限な領域に束縛される。

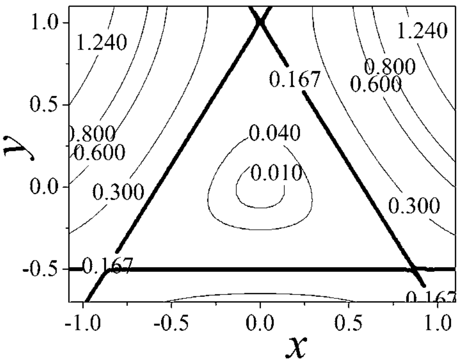

図２：Hénon-Heiles系のポテンシャルU(x, y)の等高線（Uの値が等しい）。太い線は、Uの値がE_c(=1/6)に等しい。

Hénon-Heiles系の位相空間は、x,y,p_x,p_yの４つの変数からなる４次元空間である。そこで、x=0でy,p_yの軸を含む平面（ポアンカレ断面Σ^x）を$p_x>0$の向きに通過する軌道$\vec{X}(t)$を図示することによってカオス軌道の特徴を見てみる。ポアンカレ断面Σ^x上にプロットされる点は、次式を満たす領域に存在する。

$$p_y^2+y^2-\frac{2}{3}y^3<2E. \tag{7}$$

１つの初期点$\vec{X}(0)=\{x(0),y(0),p_x(0),p_y(0)\}$から出発した軌道$\vec{X}(t)$は、エネルギー積分Ｅが一定なので３次元空間に束縛される。もし仮にエネルギー積分Ｅ以外に保存量があれば、軌道$\vec{X}(t)$はある２次元の曲面に束縛されるので、ポアンカレ断面Σ^x上では、ある閉曲線上にプロットされる。逆に、エネルギー積分Ｅ以外に保存量がなければ、軌道$\vec{X}(t)$は、３次元の運動になるので、ポアンカレ断面Σ^x上では、プロットされる点が２次元の広がりをもつことになる。

図３は、系のエネルギー積分Ｅを変えた時のポアンカレ断面Σ^x上のカオス軌道をプロットしたものである。黒い領域がカオス領域（カオスの海）である。

図３より、この系はエネルギー積分Ｅが大きくなるに従ってKAMトーラスは破壊され、カ

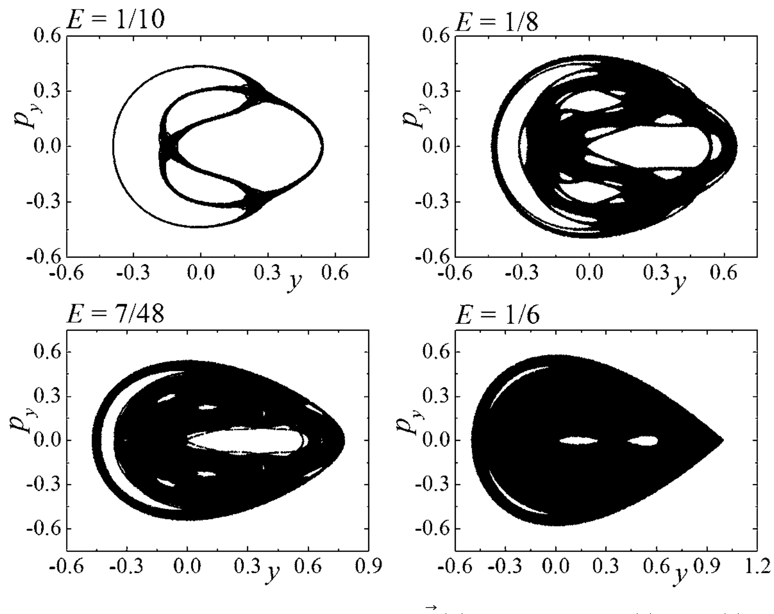

図３：位相空間内でカオス領域内のある1つの初期点$\vec{X}(0)$から出発し、x(t)=0でy(t),p_y(t)の軸を含む平面（ポアンカレ断面Σ^x）をp_y(t)>0の向きに通過する軌道$\vec{X}(t)$

オス領域が広がることがわかる。従って、位相空間内での軌道$\vec{X}(t)$全体の性質は、エネルギー積分Eが大きくなる($E \le E_c$)につれて規則的な運動からカオス的な運動へ遷移していくことがわかる。

次節では、カオス軌道の統計的性質を調べるために、２時間相関関数$C_y(t)$とパワースペクトル$I_y(\omega)$を数値的に求める。

３．２時間相関関数$C_y(t)$とパワースペクトル$I_y(\omega)$

図４は、E=1/6におけるカオス軌道$\vec{X}(t)$の(a) x-y平面上での軌跡と(b) y(t)の時間変動である。このようにy(t)の時間変動は、非常に複雑である。

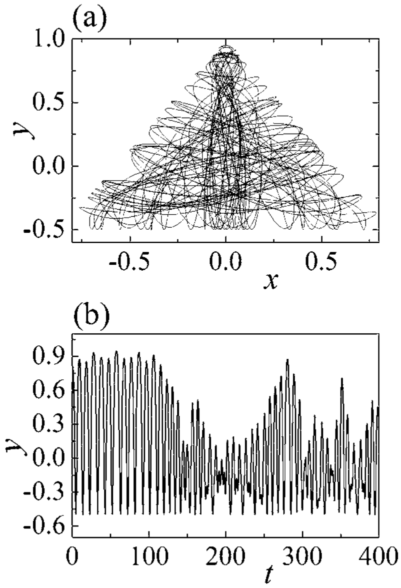

図４：E=1/6におけるカオス軌道$\vec{X}(t)$(t=0-128π)の(a) x-y平面上での軌跡と(b) y(t)の時系列

そこで、Hénon-Heiles系の運動方程式(6)の

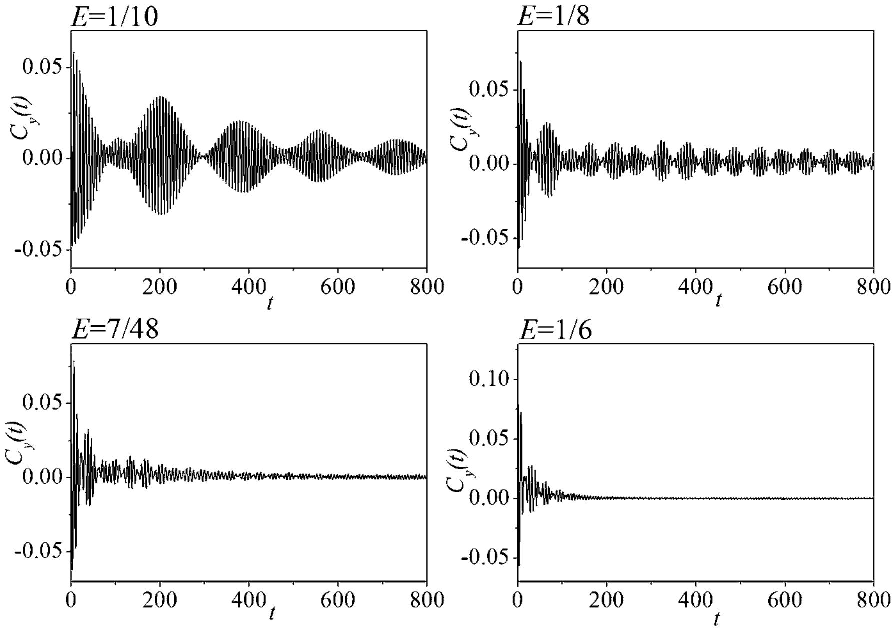

図５：(9)式の数値計算から得られた２時間相関関数(Δt=2π/64, N=10^7)

カオスの海上でのカオス軌道の乱雑さの程度を統計的に調べるために、次式のy(t)の２時間相関関数を数値計算により求めた[10]。

$$C_y(t) \equiv \langle y(t)y(0) \rangle = \lim_{\tau=\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} ds\ y(t+s)y(s). \quad (8)$$

⑻式における長時間平均は、カオス軌道のエルゴード性により、図３のカオスの海上の初期値$\vec{X}(0)$には依存しない。⑻式を数値計算より求めるために、次式のように時間積分を離散的時系列t=iΔt (i=0,1,2,…)の和に置き換えた。

$$C_y(t) = \langle y(t)y(0) \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} y(t+i\Delta t)y(i\Delta t). \quad (9)$$

図５は、E=1/10,1/8,7/48,1/6における⑼式の２時間相関関数の数値計算の結果である。図５からわかるように、４つのエネルギー積分値のいずれに対しても時間tが大きくなるに従い、２時間相関関数は振動しながら０に漸近している。系に混合性がある場合、初期の情報が時間の経過と共に失われることから、Hénon-Heiles系のカオス軌道はエルゴード的であることに加え、混合性をもっていることがわかる。しかしながら、これらの２時間相関関数の減衰形は単純ではない。

y(t)の２時間相関関数は、Wiener-Khintchineの公式[11]より、y(t)のパワースペクトルのフーリエ変換と等しい。そこで、２時間相関関数の減衰形にどのような振動成分が含まれるかを調べるために、次式により与えられるy(t)のパワースペクトルを調べた。

$$\begin{aligned} I_y(\omega) &\equiv \lim_{\tau\to\infty} \frac{\tau}{2\pi}\left\langle \left| \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} dt\ y(t)e^{-i\omega t} \right|^2 \right\rangle \\ &= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\tau} dt \left(1-\frac{t}{\tau}\right) C_y(t)\cos(\omega t). \end{aligned} \quad (10)$$

⑽式を数値計算より求めるために、次式のように⑽式の時間積分を離散的時系列t=mΔt (m=0,1,2,…)、τ=N'Δtの和に置き換

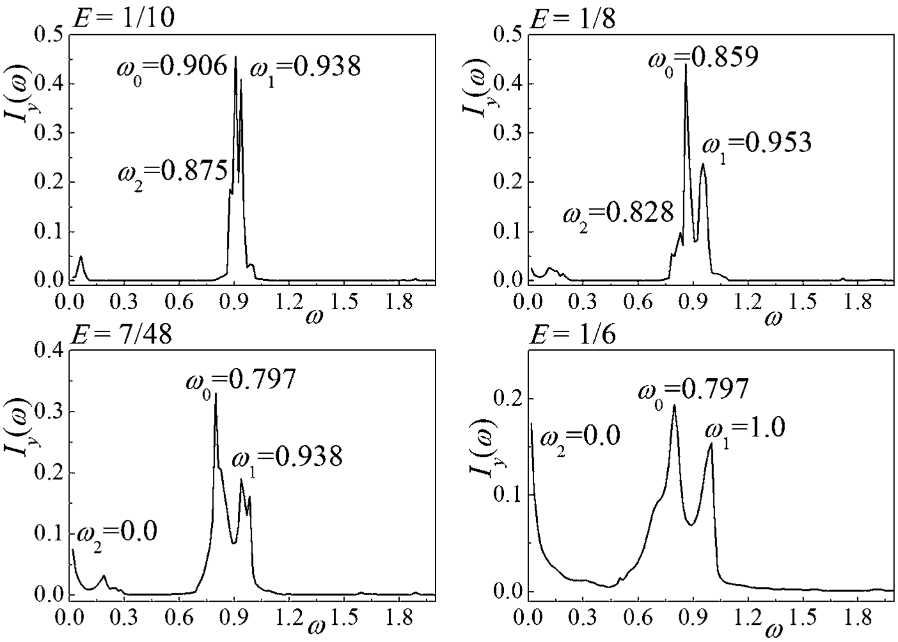

図６：⑾式の数値計算から得られたパワースペクトル($\Delta t=T/2^6=2\pi/64, N'=2^{12}, N=10^7$)

えた。

$$I_y(\omega)=\frac{\tau}{2\pi}\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1}\left|\frac{1}{N'}\sum_{m=0}^{N'-1}y(\ell\Delta t+m\Delta t)e^{-i\omega m\Delta t}\right|^2. \tag{11}$$

図6は、高速フーリエ変換(FFT)を使って、⑾式のパワースペクトルを数値的に求めた結果である。

y(t)の2時間相関関数は、y(t)のパワースペクトルのフーリエ変換であることから、図6におけるパワースペクトルの各ピークについてローレンツ型スペクトルを仮定し、⑼式より直接求めた2時間相関関数と、指数型減衰関数と三角関数（角振動数はパワースペクトルの各ピークの振動成分に対応）の積和とのフィッティングを最小二乗法により試みた。パワースペクトルのピークの中で高いほうから順番に3番目までを$\omega_0, \omega_1, \omega_2$とし、3項近似を行った。図7は、その結果である。各エネルギー積分Eに対して得られたy(t)の2時間相関関数の近似形は、次の通りである。

E=1/10に対しては、

$$\begin{aligned}C_y(t)= &\ 0.014e^{-0.003t}\cos(0.938t+0.847)\\ &+0.024e^{-0.003t}\cos(0.906t+0.969)\\ &+0.047e^{-0.022t}\cos(0.875t+0.055)\end{aligned} \tag{12}$$

となった（決定係数はR^2=0.607, t=0-256π）。2時間相関関数の相関時間τ_rを、上式の中で指数関数が最も遅く減衰する項の指数の逆数で見積もると、$\tau_r\cong 333.3(=\frac{1}{0.003})$である。

E=1/8に対しては、

$$\begin{aligned}C_y(t)= &\ 0.012e^{-0.002t}\cos(0.859t+0.117)\\ &+0.034e^{-0.022t}\cos(0.953t-0.195)\\ &+0.030e^{-0.052t}\cos(0.828t+0.355)\end{aligned} \tag{13}$$

となった（決定係数はR^2=0.738, t=0-256π）。2時間相関関数の相関時間τ_rは、上式から見積もると、$\tau_r\cong 500(=\frac{1}{0.002})$である。

E=7/48に対しては、

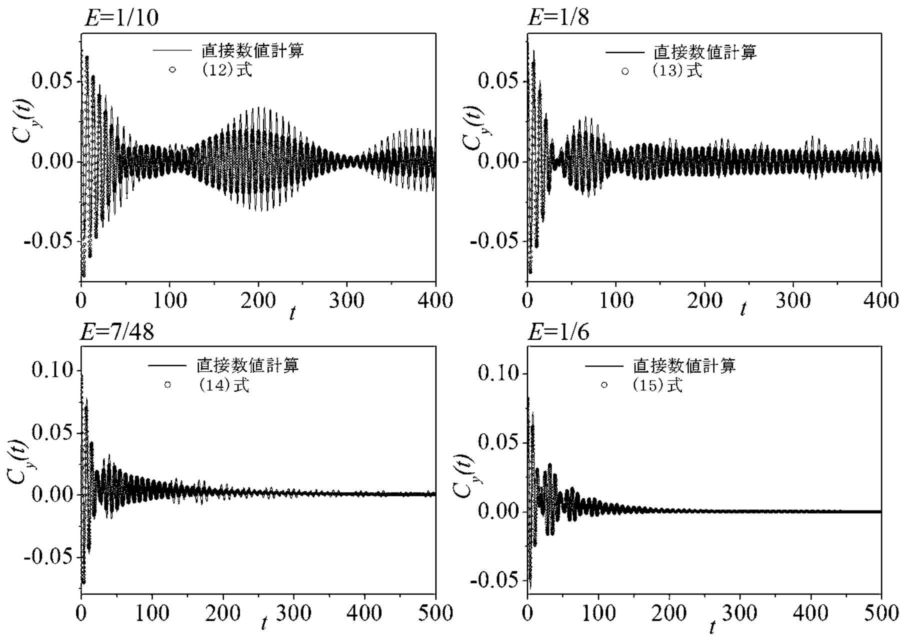

図7：⑼式の数値計算から得られた2時間相関関数と最小二乗法によるフィッティングにより得られた関数との比較

$$C_y(t)= 0.030e^{-0.014t}\cos(0.797t+0.29) +0.0634e^{-0.07t}\cos(0.938t-0.292) +0.007e^{0.005t} \tag{14}$$

となった（決定係数はR^2=0.885, t=0-256π）。２時間相関関数の相関時間τ_rは、上式から見積もると、τ_r=200(=$\frac{1}{0.005}$)である。

E=1/6に対しては、

$$C_y(t)= 0.026e^{-0.017t}\cos(0.797t-0.054) +0.043e^{-0.04t}\cos(t-0.672) +0.013e^{-0.015t} \tag{15}$$

となった（決定係数はR^2=0.88, t=0-256π）。２時間相関関数の相関時間τ_rは、上式から見積もると、$\tau_r\cong$66.7(=$\frac{1}{0.015}$)である。

エネルギー積分Ｅのいずれの値に対しても、決定係数が0.6を超えており、指数型関数と三角関数の積和とのあてはまりが良い。エネルギー積分Ｅが大きくなるほど、指数型関数と三角関数の積和とのあてはまり良くなる傾向がある。各調和振動子の基本周期はT=2πであるから、各エネルギー積分Ｅに対する相関時間は、E=1/10では$\tau_r\cong$53.1T、E=1/8では$\tau_r\cong$79.6T、E=7/48では$\tau_r\cong$31.8T、E=1/6では$\tau_r\cong$10.6Tとなっており、いずれも相関時間が長いことがわかる。また、エネルギー積分Ｅのいずれの値に対しても、初期の時間範囲ではあてはまりが良いが、長時間後の時間範囲では、直接計算で求めたデータの絶対値の方が、最小二乗法によるフィッティングにより得られた関数の絶対値よりも大きく、あてはまりが良くない傾向がある。エネルギー積分Ｅが小さいほど、この傾向は顕著に表れている。

次節では、カオス軌道の初期値鋭敏性や軌道不安定性の時間的揺らぎを調べるために、リアプノフスペクトルと局所軌道拡大率の揺らぎを考察する。

４．リアプノフスペクトルと局所軌道拡大率の揺らぎ

４．１．リアプノフスペクトル

リアプノフ指数は、位相空間内の近接した軌道の距離が、時間の経過とともにどのように拡大されるかを表す量である。ある時系列がカオスかどうかを判定する量として最も利用されるのが、このリアプノフ指数である。以下に、リアプノフ指数を求める手続きについて説明する。

$\vec{X}(t)$における微小変位を$\delta\vec{X}(t)$とすると、$\vec{X}(t)$と$\delta\vec{X}(t)$だけずれた軌道は、Δt経過した後

$$\vec{X}(t+\Delta t)+\delta\vec{X}(t+\Delta t)=\vec{F}\left(\vec{X}(t)+\delta\vec{X}(t)\right) \tag{16}$$

となる。上式の右辺の線形近似により、$\delta\vec{X}(t)$の時間発展は、$\vec{F}(\vec{X}(t))$のヤコビ行列$DF(\vec{X}(t))$を用いて

$$\delta\vec{X}(t+\Delta t)=DF\left(\vec{X}(t)\right)\delta\vec{X}(t) \tag{17}$$

により与えられる。従って、初期のずれ$\delta\vec{X}(0)$と時間t(=NΔt)経過したときのずれ$\delta\vec{X}(t)$の比は、次式により与えられる。

$$\frac{|\delta\vec{X}(t)|}{|\delta\vec{X}(0)|}=\left|\prod_{i=0}^{N-1} DF\left(\vec{X}(i\Delta t)\right)\right|. \tag{18}$$

Hénon-Heiles系における$\delta\vec{X}(t)$は、４つのベクトルの組で与えられる。そこで４つのベクトルの組として、互いに直交する単位ベクトルの組$\vec{u}_1(\vec{X}(t)),\vec{u}_2(\vec{X}(t)),\vec{u}_3(\vec{X}(t)),\vec{u}_4(\vec{X}(t))$の各ベクトルの時間発展を考える。その初期のずれ$\delta\vec{X}(0)$を与えるベクトルの組として、それぞれ、ｘ軸，ｙ軸，p_x軸，p_y軸に沿ったずれをとる。

$$\delta\vec{X}(0)=\left\{\vec{u}_1\left(\vec{X}(0)\right),\vec{u}_2\left(\vec{X}(0)\right),\right.$$
$$\left.\vec{u}_3\left(\vec{X}(0)\right),\vec{u}_4\left(\vec{X}(0)\right)\right\}. \tag{19}$$

これらの４つの単位ベクトルを近接軌道に沿って時間発展させる。

$$\begin{aligned}\vec{e}_1\left(\vec{X}(\Delta t)\right)&= DF\left(\vec{X}(0)\right)\vec{u}_1\left(\vec{X}(0)\right),\\ \vec{e}_2\left(\vec{X}(\Delta t)\right)&= DF\left(\vec{X}(0)\right)\vec{u}_2\left(\vec{X}(0)\right),\\ \vec{e}_3\left(\vec{X}(\Delta t)\right)&= DF\left(\vec{X}(0)\right)\vec{u}_3\left(\vec{X}(0)\right),\\ \vec{e}_4\left(\vec{X}(\Delta t)\right)&= DF\left(\vec{X}(0)\right)\vec{u}_4\left(\vec{X}(0)\right).\end{aligned} \tag{20}$$

$\delta\vec{X}(0)$を、Δtだけ時間発展させた上式のベクトルの組$\vec{e}_1(\vec{X}(\Delta t)),\vec{e}_2(\vec{X}(\Delta t)),\vec{e}_3(\vec{X}(\Delta t)),\vec{e}_4(\vec{X}(\Delta t))$から、グラム・シュミット（Gram-Schmidt）の直交化法により、直交規格化したベクトルの組$\vec{u}_1(\vec{X}(\Delta t)),\vec{u}_2(\vec{X}(\Delta t)),\vec{u}_3(\vec{X}(\Delta t)),\vec{u}_4(\vec{X}(\Delta t))$を求め、これを新たに$DF(\vec{X}(\Delta t))$により時間発展させる。このような操作を繰り返すことにより、次式のリアプノフ指数の組（リアプノフスペクトル）が得られる。

$$\langle\lambda_1\rangle+\langle\lambda_2\rangle+\langle\lambda_3\rangle+\langle\lambda_4\rangle\equiv\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\frac{|\delta\vec{X}(t)|}{|\delta\vec{X}(0)|}$$
$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N\Delta t}\log\frac{|\delta\vec{X}(N\Delta t)|}{|\delta\vec{X}(0)|}. \tag{21}$$

ここでリアプノフ指数が大きい方から順番に$\langle\lambda_1\rangle$, $\langle\lambda_2\rangle$, $\langle\lambda_3\rangle$, $\langle\lambda_4\rangle$とした。軌道がカオス的である場合、リアプノフスペクトルの内の最大リアプノフ指数$\langle\lambda_1\rangle$は正となる。

表１は、数値計算により得られたE=1/10, 1/8,7/48,1/6におけるリアプノフスペクトルである。

表１：E=1/10,1/8,7/48,1/6におけるリアプノフスペクトル（$\Delta t=2\pi/64$, $N=10^7$）

E	$\langle\lambda_1\rangle$	$\langle\lambda_2\rangle$	$\langle\lambda_3\rangle$	$\langle\lambda_4\rangle$
1/10	0.020	0.001	-0.001	-0.020
1/8	0.044	0.002	-0.002	-0.044
7/48	0.082	0.002	-0.002	-0.082
1/6	0.126	0.003	-0.003	-0.126

すべてのエネルギー積分Ｅに対して、カオス軌道の最大リアプノフ指数$\langle\lambda_1\rangle$は正であり、最大リアプノフ指数$\langle\lambda_1\rangle$はＥに対して単調に増加することがわかる。Hénon-Heiles系は、保存系であるから常に$\langle\lambda_1\rangle+\langle\lambda_2\rangle+\langle\lambda_3\rangle+\langle\lambda_4\rangle=0$となる。

４．２．局所軌道拡大率の揺らぎ

保存力学系におけるカオス軌道は、しばしばカオスの海とトーラスの島との境界領域に長い間停滞する。「カオスの海」と「カオスの海とトーラスの島との境界領域」とを間欠的に行き来することにより、カオス軌道の軌道不安定性の時間変動には大きな揺らぎが生じる。

各時刻でのカオス軌道の軌道不安定性を表す局所軌道拡大率$\lambda_1(\vec{X}(t))$を次式で定義する[12)]。

$$\lambda_1\left(\vec{X}(t)\right)\equiv\log\left|DF\left(\vec{X}(t)\right)\vec{u}_1\left(\vec{X}(t)\right)\right|. \tag{22}$$

最大リアプノフ指数は、局所軌道拡大率の長時間平均によって与えられる。

$$\langle\lambda_1\rangle=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N\Delta t}\sum_{i=0}^{N-1}\log\left|DF\left(\vec{X}(i\Delta t)\right)\vec{u}_1\left(\vec{X}(i\Delta t)\right)\right|. \tag{23}$$

カオスの海とトーラスの島との境界領域では、近接軌道は時間が経過しても離れないため、近似的に$\lambda_1(\vec{X}(t))\cong 0$となる。カオス軌道の局所軌道拡大率の揺らぎを調べるため、次の

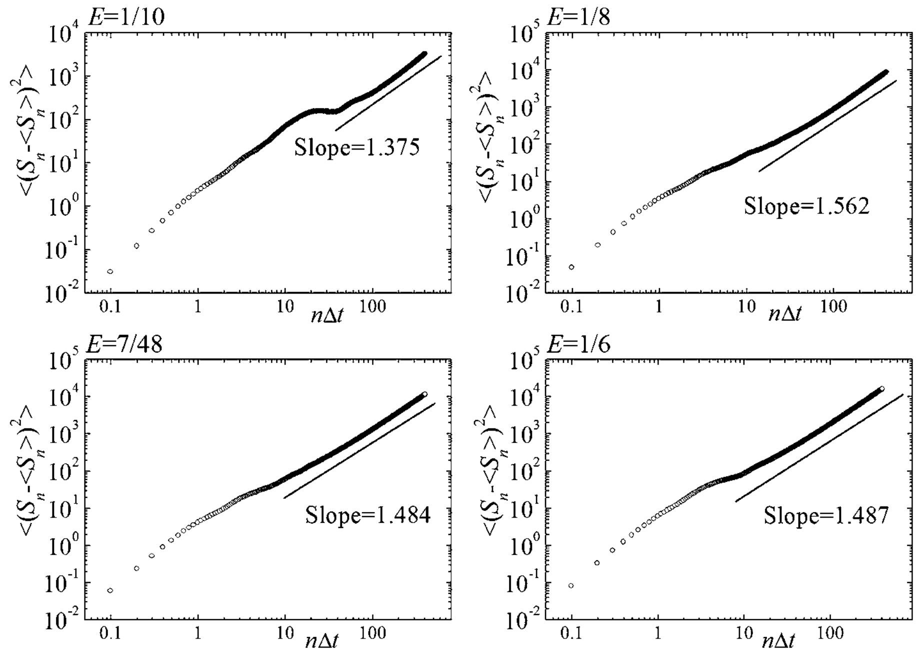

図８：粗視化された軌道拡大率の分散（$n\Delta t$=0-128π, Δt=2π/64, N=10^7）

粗視化された軌道拡大率を定義する[12)]。

$$\Lambda_n\left(\vec{X}(0)\right)\equiv\frac{1}{n\Delta t}\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_1\left(\vec{X}(i\Delta t)\right). \tag{24}$$

局所軌道拡大率の２時間相関関数を次式で定義する。

$$C_\lambda(t)\equiv\left\langle\left(\lambda_1\left(\vec{X}(t)\right)-\langle\lambda_1\rangle\right)\left(\lambda_1\left(\vec{X}(0)\right)-\langle\lambda_1\rangle\right)\right\rangle. \tag{25}$$

ここで粗視化された局所軌道拡大率の和 $S_n(\vec{X}(0))\equiv n\Delta t\Lambda_n(\vec{X}(0))$ の分散は次式で与えられる。

$$\left\langle\left(S_n\left(\vec{X}(0)\right)-\left\langle S_n\left(\vec{X}(0)\right)\right\rangle\right)^2\right\rangle =nC_\lambda(0)+2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)C_\lambda(i\Delta t). \tag{26}$$

上式の分散は、２時間相関関数に長時間相関が存在する場合（$C_\lambda(t)\propto t^{-(\beta-1)}$）、

$$\left\langle\left(S_n\left(\vec{X}(0)\right)-\left\langle S_n\left(\vec{X}(0)\right)\right\rangle\right)^2\right\rangle\propto(n\Delta t)^\zeta \tag{27}$$

となる(ζ=3－β＞1)。

図８が、粗視化された局所軌道拡大率の分散の数値計算結果である。

E=1/10では ζ=1.375, β=1.625、E=1/8では ζ=1.562, β=1.438、E=7/48では ζ=1.484, β=1.516、E=1/6では ζ=1.487, β=1.513となり、E=1/10, 1/8, 7/48, 1/6のいずれに対しても、ζが１を超えている。従って、カオス軌道の局所軌道拡大率の２時間相関関数には時間tの逆べき型の長時間相関があることがわかった。

５．まとめと今後の課題

本稿では、保存力学系でカオス解をもつ典型的なモデルであるHénon-Heiles系のカオ

ス軌道の統計的性質を数値計算により調べた。Hénon-Heiles系は、エネルギー積分Eが大きくなるに従い、位相空間内でカオス解をもつ領域が広がる。カオス解をもつ領域内に初期値$\vec{X}(0)$をとり、長時間平均により種々の統計性を数値的に求めた。

カオス軌道の乱雑さの程度を調べるため、変数yの2時間相関関数を数値的に求めた。その結果、エネルギー積分がE=1/10,1/8,7/48,1/6のいずれの値に対しても時間 t が大きくなるに従い、2時間相関関数は振動しながら0に漸近していく曲線となった（図5）。Hénon-Heiles系のカオス軌道はエルゴード的であることに加え、混合性をもっていることがわかった。次に、2時間相関関数の減衰形を評価するために、変数yのパワースペクトルを数値的に求めた(図6)。このパワースペクトルのピーク構造を使って、2時間相関関数と、指数型減衰関数と三角関数の積和とのフィッティングを最小二乗法により行った（図7）。Eのいずれの値に対しても、決定係数が0.6を超えており、あてはまりは良く、エネルギー積分Eが大きくなるほど、指数型関数と三角関数の積和とのあてはまりが良くなる傾向がみられた。しかし、Eのいずれの値に対しても、初期の時間範囲ではあてはまりが良いが、長時間後の時間範囲では、直接計算で求めたデータの絶対値の方が、最小二乗法によるフィッティングにより得られた関数の絶対値よりも大きくなっており、あてはまりが良くない傾向がみられた。

カオス軌道の初期値鋭敏性を調べるため、リアプノフスペクトルを数値的に求めた（表1）。その結果、エネルギー積分がE=1/10,1/8,7/48,1/6のいずれの値に対しても最大リアプノフ指数〈λ_1〉が正になることを確認した。また、エネルギー積分Eが大きくなるに従い、位相空間内でカオス解をもつ領域が広がると共に最大リアプノフ指数〈λ_1〉の値も大きくなることを確認した。保存力学系におけるカオス軌道は、「カオスの海」と「カオスの海とトーラスの島との境界領域」とを間欠的に行き来することにより、カオス軌道の軌道不安定性の時間変動には大きな揺らぎが生じる。この揺らぎを特徴づけるために、長時間平均が最大リアプノフ指数に対応する局所軌道拡大率の時間変動を調べた。局所軌道拡大率の分散を数値的に求めた結果、エネルギー積分がE=1/10,1/8,7/48,1/6のいずれの値に対しても、べきの指数ζが1を超え、カオス軌道の局所軌道拡大率の2時間相関関数には時間 t の逆べき型の長時間相関があることがわかった。これは、カオス軌道の「トーラスの島とカオスの海の境界領域」への長時間の停滞より生み出されるものであると考えられる。

Hénon-Heiles系におけるカオス軌道の2時間相関関数の減衰形と、指数型減衰関数と三角関数の積和とのフィッティングが、長時間後の時間範囲やエネルギー積分Eが小さい範囲で不十分であったことが今後の課題として残った。このずれが、カオス軌道の「カオスの海」と「カオスの海とトーラスの島との境界領域」とを繰り返し行き来する間欠性によるものなのかを調べるためには、フィッティングする関数形として指数型減衰関数と三角関数の積和以外の関数形を試みる必要がある。最近、射影演算子法を援用して、カオス解をもつ決定論的な微分方程式を非マルコフな線形確率微分方程式に変換し、線形確率微分方程式の核となる記憶関数を数値的に求め、2時間相関関数やパワースペクトルを分析する研究が行われている[10) 13) 14) 15)]。

特に、森、岡村らは、蔵本-Sivashinsky（KS）方程式における状態変数の２時間相関関数は、初期の時間範囲で可逆な代数型減衰、長時間後の時間範囲で不可逆な指数型減衰からなること、パワースペクトルは、ローレンツ型ピークと指数型ウィングからなることを示した[16)]。Hénon-Heiles系のカオス軌道の２時間相関関数の減衰形のフィッティングを改善するためには、初期の時間範囲と長時間後の時間範囲に分けて評価することや、パワースペクトルのピーク構造のさらなる考察が必要である。

参考文献

1）A. J. Lichitenberg and M. A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics,* Springer-Verlag, New York, 1992.

H. G. Schuster, *Deterministic Chaos*, VCH, Weinheim, 1988.

2）H. Mori and Y. Kuramoto, *Dissipative Structures and Chaos,* Springer-Verlag, Berlin, 1998.

3）E. Fermi, J. Pasta, and S. Ulam, *Studies of Nonlinear Problems,* Los Alamos Rept. La-1049, 1955.

4）V. I. Arnold, "Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics", Russian Math. Surveys 18 (6), pp. 85-191, 1963.

A. N. Kolmogorov, "On the conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function", Dokl. Akad. Nauk SSSR 98, pp. 525-530, 1954.

J. K. Moser, "Convergent series expansions for quasi-periodic motions", Math. Ann. 169, pp. 136-176, 1967.

5）R. Ishizaki, T. Horita, T. Kobayashi and H. Mori, "Anomalous Diffusion Due to Accelerator Modes in the Standard Map", Prog. Theor. Phys. 85, pp. 1013-1022, 1991.

R. Ishizaki, T. Horita and H. Mori, "Anomalous Diffusion and Mixing of Chaotic Orbits in Hamiltonian Dynamical Systems", Prog. Theor. Phys. 89, pp. 947-963, 1993.

6）R. Ishizaki, S. Kuroki, H. Tominaga, N. Mori and H. Mori, "Time Correlations and Diffusion of a Conservative Forced Pendulum", Prog. Theor. Phys. 109, pp. 169-186, 2003.

7）M. Hénon and C. Heiles, "The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments", Astron. J. 69, pp. 73-79, 1964.

8）E. Forest, *AIP Conference Proceedings,* 184, pp. 1106-1136, 1989.

9）E. Forest and R. D. Ruth, "Fourth order symplectic integration", Physica D 43, pp. 105-117, 1990.

10）H. Mori, S. Kuroki, H. Tominaga, R. Ishizaki and N. Mori, "Memory Function Approach to Chaos and Turbulence and the Continued Fraction Expansion", Prog. Theor. Phys. 111, pp. 635-660, 2004.

11）R. Kubo, M. Toda and N. Hashitsume, *Statistical Physics* II, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, p. 17, 1991.

12）H. Mori, H. Hata, T. Horita and T. Kobayashi, "Statistical Mechanics of Dynamical Systems", Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 99, pp. 1-63, 1989.

13）H. Mori, S. Kuroki, H. Tominaga, R. Ishizaki and N. Mori, "Randomization and Memory Functions of Chaos and Turbulence", Prog. Theor. Phys. 109, pp. 333-355, 2003.

14）H. Tominaga, S. Kuroki and H. Mori, "Time

Correlations and Power Spectra of the Duffing Equation", Prog. Theor. Phys. 109, pp. 575-589, 2003.

15) R. Ishizaki, H. Mori, H. Tominaga, S. Kuroki and N. Mori, "The Memory Function and Chaos-Induced Friction in the Chaotic Hénon-Heiles System", Prog. Theor. Phys. 116, pp. 1051-1067, 2006.

16) H. Mori and M. Okamura, "Dynamic structures of the time correlation functions of chaotic nonequilibrium fluctuations", Phys. Rev. E 76, 061104 (9 pages), 2007.