

Hénon-Heiles系のカオス軌道の初期時間領域と終期時間領域での2時間相関関数の減衰形

石 崎 龍 二

要旨 Hénon-Heiles系のカオス軌道の統計的性質として力学変数の2時間相関関数の数値解析を行った。カオス軌道は、正のLyapunov指数をもった不安定な非周期軌道である。その初期値への敏感な依存性により、決定論に従うにもかかわらず初期値のわずかな測定誤差が指数関数的に拡大され、長時間後の予測が困難となる。

Hénon-Heiles系のカオス軌道の2時間相関関数は、時間と共に振動しながら減衰し、0に漸近していくことが、数値計算により確認できる。しかし、その減衰形は単調ではなく、決定論的な性質が残る初期時間領域と確率的でランダムな性質があらわれる終期時間領域とで異なる性質をもつものと考えられる。パワースペクトルのピーク構造や最大Lyapunov指数により、初期時間領域と終期時間領域でのカオス軌道の2時間相関関数の減衰形の違いを考察した。

キーワード：保存力学系、カオス、2時間相関関数、パワースペクトル、Lyapunov指数

1. はじめに

保存力学系において、カオスが発生する場合の相空間は、一般に規則的な運動をする領域（トーラスの島）と不規則的な運動をする領域（カオスの海）から構成される。カオス軌道は非周期軌道であるため、相空間上のカオスの海上を、くまなく巡る[1], [2], [3], [4]。しかし、カオスの海上でのカオス軌道の統計性は、単純ではない[5], [6], [7], [8]。私は、これまで少数自由度の保存力学系におけるカオスの統計的な性質を、数値解析により研究を行ってきた。その結果、少数自由度の保存力学系では、カオス軌道がトーラスの島とカオスの海の境界領域に

停滞するため、種々の物理量に長時間相関があらわれることがわかってきた[9], [10]。

前稿[11], [12]では、カオスが発生する保存力学系の代表的な例であるHénon-Heiles系における2時間相関関数とパワースペクトルについて考察した。Hénon-Heiles系において非線形性が最も強いパラメータ $E=1/6$ における全ての力学変数 x, y, p_x, p_y の2時間相関関数が振動しながら0に漸近していくこと、 x と y 、 p_x と p_y の2時間相関関数が一致することを数値計算により示した。 y の2時間相関関数は、指数減衰関数とパワースペクトルのピークに対応する振動数で振動する指数減衰関数の和で表わせること、 p_y の2時間相関関数は、パワースペクトル

ルのピークに対応する振動数で振動する指数減衰関数の和で表わせることを示した。

カオス軌道は、正のLyapunov指数をもった不安定な非周期軌道であり、その初期値への敏感な依存性により、決定論に従うにもかかわらず初期値のわずかな測定誤差が指数関数的に拡大され、長時間後の予測が困難となる。そのため、Hénon-Heiles系のカオス軌道の2時間相関関数の減衰形は単調ではなく、決定論的な性質が残る初期時間領域と確率的でランダムな性質があらわれる終期時間領域とで異なる性質をもつものと考えられる。

本稿では、保存力学系のカオス解をもつ典型的な微分方程式系であるHénon-Heiles系の初期時間領域と終期時間領域でのカオス軌道の2時間相関関数の減衰形の違いについて考察した。

第2節でHénon-Heiles系について紹介し、第3節でカオス時系列の2時間相関関数とパワースペクトルの数値計算結果を示し、第4節でパワースペクトルのピーク構造の数値計算結果と2時間相関関数との関係について紹介する。第5節でカオス軌道の初期時間領域と終期時間領域での2時間相関関数の減衰形の違いについて考察する。第6節で今回の数値計算のまとめと今後の課題を述べる。

2. Hénon-Heiles系

M. HénonとC. Heilesは、Hénon-Heiles系において、非線形パラメータであるエネルギー積分 $I_1 = E$ が大きくなるに従い相空間内の可積分な領域が壊れていく様子を、計算機実験によって示した(1964年)。これは、保存力学系の相空間上でのカオス軌道を数値的に描いて見

せた最初の研究として知られている[13]。

Hénon-Heiles系のハミルトニアン H は、次式で与えられる。

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + U(x, y) \quad (1)$$

ポテンシャル $U(x, y)$ は、次式で与えられる。

$$U(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3\right) \quad (2)$$

(2)式の右辺の第3、4項が非線形項を与える。

(1)式のハミルトニアン H より、 $\vec{X}(t)$ の時間発展方程式は、次式より与えられる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \end{bmatrix} = \vec{F}(\vec{X}(t)) = \begin{bmatrix} \partial H / \partial p_x \\ \partial H / \partial p_y \\ -\partial H / \partial x \\ -\partial H / \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2xy \\ -x^2 + y^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

エネルギー積分 E が $E_c (= 1/6)$ 以下であれば、Hénon-Heiles系の軌道は相空間内の有限な領域に束縛される。Hénon-Heiles系のエネルギー積分 $I_1 = E$ は、保存量である。従って、 $\vec{X}(t) = \{x(t), y(t), p_x(t), p_y(t)\}$ の内の3つの変数の値が決まれば、すべての変数の値が決まるので、この系の自由度は実質的に3である。そのため、相空間上の全ての軌道は、 $E = \text{一定}$ の条件を満足する3次元領域内に閉じ込められる。図1は、系のエネルギー積分を変えた時のポアンカレ断面 Σ^* 上のカオス軌道をプロットしたものである。もし、 I_1 の他にもう1つの保存量が存在すれば、軌道は2次元領域内に局在するため、ポアンカレ断面 Σ^* 上での軌道 $\vec{X}(t)$ は、ある1次元の線あるいは閉曲線上にプロットされる。図1における黒く広がった領域は「カオスの海」と呼ばれる領域である。「カオスの海」上に初期値をとれば、その軌道 $\vec{X}(t)$ は、3次元的となり、 I_1 の他にもう1つの保存量がないため、非可積分となる。図1より、この系

はエネルギー E が大きくなるに従って「カオスの海」が広がることがわかる。従って、エネルギー $E(\leq E_c)$ が大きくなるにつれて相空間内での軌道の大域的な性質が、カオス的な運動が支配的になることがわかる。

Runge-Kutta法では、繰り返し計算が多くなるにしたがい、エネルギー誤差が大きくなってしまふ危険がある。前稿[11], [12]と同様に本稿でも、方程式(3)の数値積分は、エネルギー誤差を一定の範囲に抑えることができるシンプレクティック数値解法を採用した[14], [15]。

次節では、カオス軌道の2時間相関関数とパワースペクトルの数値計算結果を紹介する。

3. 2時間相関関数とパワースペクトル

Hénon-Heiles系の運動方程式(3)のカオス軌道のランダムさの統計的に調べるために、次式の $p_y(t), y(t)$ の2時間相関関数を数値計算で求めた[16]。

$$C_{p_y}(t) \equiv \langle p_y(t)p_y(0) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T ds p_y(t+s)p_y(t) \quad (4)$$

$$C_y(t) \equiv \langle y(t)y(0) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T ds y(t+s)y(t) \quad (5)$$

図2は、非線形性が最も強いパラメータ $E=1/6$ における2つの力学変数 p_y, y について2時間相関関数を数値的に求めた結果である。図2より、 p_y, y のいずれに対しても時間 t が大きくなるに従い、2時間相関関数は振動しながら0に漸近している。ただし、これらの2時間相関関数の減衰形は単純ではない。

Wiener-Khinchineの公式[17]より、 $p_y(t), y(t)$ のパワースペクトルは、 $p_y(t), y(t)$ の2時間相関関数のフーリエ変換である。 $p_y(t), y(t)$ のパワースペクトルにより、2時間相関関数の減衰形に含まれる振動成分を抜き出すことができる。 $p_y(t), y(t)$ のパワースペクトルは、次式により与えられる。

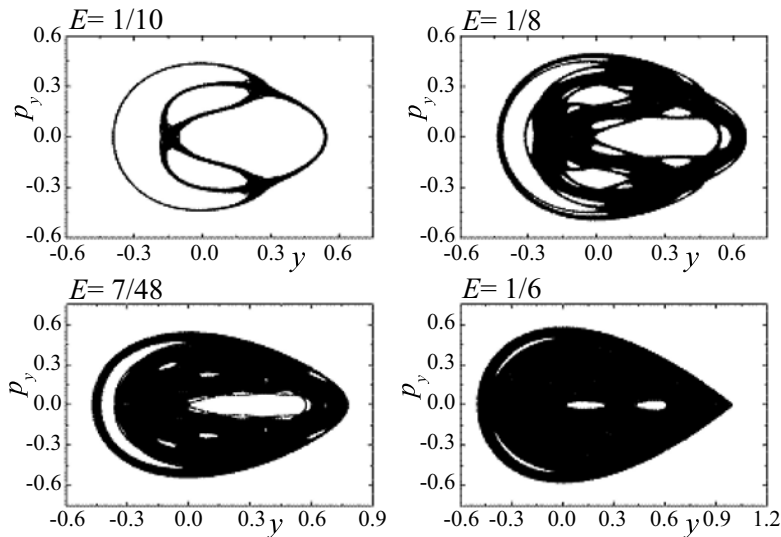


図1： $E=1/10, 1/8, 7/48, 1/6$ において、相空間内でカオス領域内のある1つの初期点 $\vec{x}(0)$ から出発し、 $x(t)=0$ で $y(t), p_y(t)$ の軸を含む平面（ポアンカレ断面 Σ^x ）を $p_x(t)>0$ の向きに通過する点のプロット

$$I_{p_y}(\omega) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi} \left\langle \left| \frac{1}{T} \int_0^T dt p_y(t) e^{-i\omega t} \right|^2 \right\rangle$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^T dt \left(1 - \frac{t}{T} \right) C_{p_y}(t) \cos \omega t \quad (6)$$

$$I_y(\omega) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi} \left\langle \left| \frac{1}{T} \int_0^T dt y(t) e^{-i\omega t} \right|^2 \right\rangle$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^T dt \left(1 - \frac{t}{T} \right) C_y(t) \cos \omega t \quad (7)$$

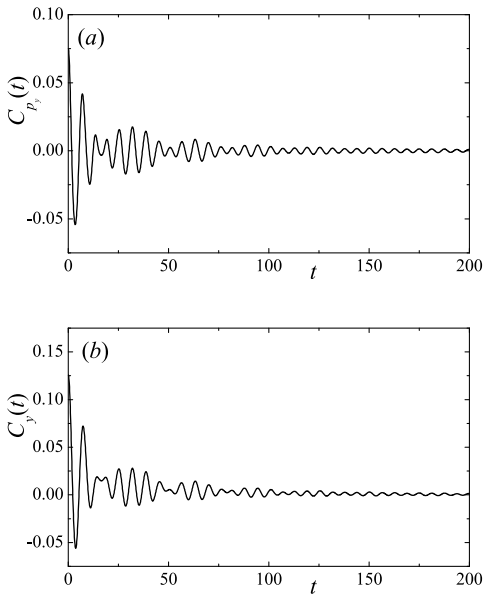


図2 : $E=1/6$ における p_y, y に関する2時間相関関数(a) $C_{p_y}(t)$ 、(b) $C_y(t)$

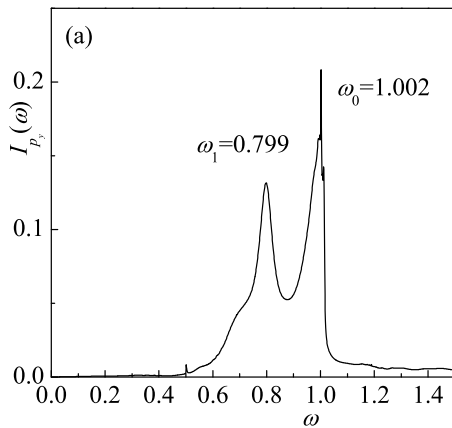


図3は、高速フーリエ変換 (FFT) を使って、(6)、(7)式のパワースペクトルを数値的に求めた結果である。

図3(a)の $p_y(t)$ のパワースペクトル $I_{p_y}(\omega)$ には、 $\omega_0=1.002$ 、 $\omega_1=0.799$ の2つの振動ピーク、図3(b)の $y(t)$ のパワースペクトル $I_y(\omega)$ には、 $\omega'_0=0.000$ 、 $\omega'_1=0.797$ 、 $\omega'_2=1.002$ の3つの振動ピークがみられる。これらのピークの振動数は、図2の2時間相関関数にみられる振動の振動数に対応する。またパワースペクトルの振動数ピーク付近の関数形は、2時間相関関数の減衰形と関連しており重要である。次節では、 $I_y(\omega)$ よりもパワースペクトルのピーク数が1つ少ない $I_{p_y}(\omega)$ のピーク構造に着目し、2時間相関関数の減衰形との関連を考察する。

4. パワースペクトルのピーク構造と2時間相関関数

図3のパワースペクトル $I_{p_y}(\omega)$ の振動数ピーク付近の関数形を考察する。

図4は、 $I_{p_y}(\omega)$ の振動数ピーク付近の構造とフィッティング関数を重ねたグラフである。

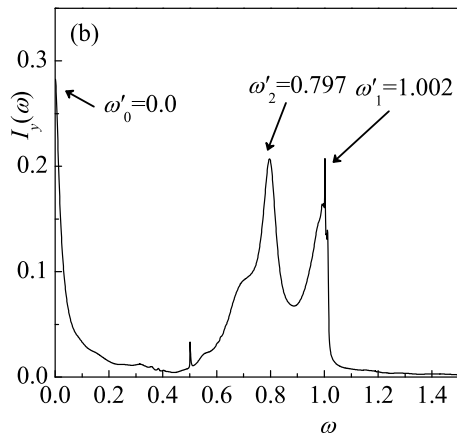


図3 : $E=1/6$ における数値計算から得られたパワースペクトル(a) $I_{p_y}(\omega)$ 、(b) $I_y(\omega)$

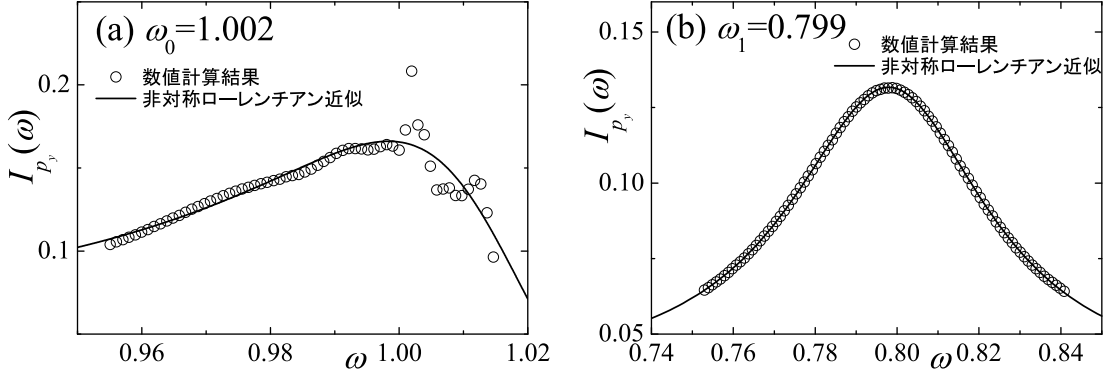


図4： $E=1/6$ におけるパワースペクトル $I_{p_y}(\omega)$ の振動数ピーク $\omega=\omega_0, \omega_1$ 付近の数値計算結果と非対称ローレンチアン近似との比較

図4(a)の $I_{p_y}(\omega)$ の $\omega=\omega_0$ 付近のフィッティング関数は、次式の非対称ローレンチアンである。

$$I_{p_y}^0(\omega) = \frac{a_0}{2\pi} \frac{(\omega - \hat{\omega}_0)\sin\theta_0 + \gamma_0\cos\theta_0}{(\omega - \hat{\omega}_0)^2 + \gamma_0^2} + \frac{a_0}{2\pi} \frac{(\omega + \hat{\omega}_0)\sin(-\theta_0) + \gamma_0\cos(-\theta_0)}{(\omega - \hat{\omega}_0)^2 + \gamma_0^2} + b_0 \quad (8)$$

図4(a)では、 $a_0=0.031$, $\gamma_0=0.025$, $\hat{\omega}_0=1.015$, $\theta_0=-1.177$, $b_0=0.030$ である。 $\omega=\omega_0$ のピークで非対称ローレンチアンからの大きなずれがみられる。 $\omega=\omega_0$ でのずれは、ラインスペクトルを示唆しているのではないかと考えられる。

図4(b)の $I_{p_y}(\omega)$ の $\omega=\omega_1$ 付近のピーク構造は、次式の非対称ローレンチアンで近似した。

$$I_{p_y}^1(\omega) = \frac{a_1}{2\pi} \frac{(\omega - \hat{\omega}_1)\sin\theta_1 + \gamma_1\cos\theta_1}{(\omega - \hat{\omega}_1)^2 + \gamma_1^2} + \frac{a_1}{2\pi} \frac{(\omega + \hat{\omega}_1)\sin(-\theta_1) + \gamma_1\cos(-\theta_1)}{(\omega + \hat{\omega}_1)^2 + \gamma_1^2} + b_1 \quad (9)$$

図4(b)では、 $a_1=0.018$, $\gamma_1=0.030$, $\hat{\omega}_1=0.799$, $\theta_1=-0.046$, $b_1=0.033$ である。(8), (9)式をフーリエ変換すると

$$C_{p_y}^0(t) = a_0 \exp[-\gamma_0 t] \cos(\hat{\omega}_0 t + \theta_0) \quad (10)$$

$$C_{p_y}^1(t) = a_1 \exp[-\gamma_1 t] \cos(\hat{\omega}_1 t + \theta_1) \quad (11)$$

となる。 p_y の2時間相関関数は、パワースペクトルの $I_{p_y}(\omega)$ のピークに対応する振動数で振動する(10), (11)式の指数減衰関数の重ね合わせで表わせることを示している。

5. カオス軌道の初期時間領域と終期時間領域での2時間相関関数の減衰形

カオス軌道は、正のLyapunov指数をもった不安定な非周期軌道である。その初期値への敏感な依存性により、決定論に従うにもかかわらず初期値のわずかな測定誤差が指数関数的に拡大され、長時間後の予測が困難となる。そのため、カオス軌道の2時間相関関数の減衰形には、2つのタイプが存在するのではないかと考えられる。初期の時間領域では、決定論的な性質が支配的であり、終期の時間領域では、確率的でランダムな性質が支配的になるのではないかと考えられる。

このような理由から、初期の時間領域では、決定論的な性質が反映されて、パワースペクトル

ルのピーク数が2つであることから、次式の時間に可逆な振動を伴う代数型減衰関数で表わされると仮定する。

$$C_{p_y}(t) = \sum_{i=0}^1 \frac{a_i}{1 + (\gamma_i t)^2} \cos(\omega_i t + \theta_i) \quad (12)$$

終期の時間領域では、ランダムな性質が反映されて、パワースペクトルのピーク数が2つであることから、次式の振動を伴う指数型減衰関数で表わされると仮定する。

$$C_{p_y}(t) = \sum_{i=0}^1 a_i \exp[-\gamma_i t] \cos(\omega_i t + \theta_i) \quad (13)$$

数値計算より得られたデータを、初期の時間領域と終期の時間領域において、それぞれ(12)式、(13)式で表わされる関数でのフィッティングを行った。但し、図4(a)にみられるラインスペクトルに対応する振動項を考慮して関数フィッティングを行った。

まず、カオス軌道が決定論的な性質を維持できる時間 τ_i の目安として、最大Lyapunov指数の逆数を考える。前稿で $E=1/6$ における最大Lyapunov指数は、0.126であることを示した[11]。 τ_i は、最大Lyapunov指数の逆数である $1/0.126=7.936\dots$ より $\tau_i=7.9$ と見積もれる。厳密に言えば、Hénon-Heiles系の場合、3次元の力学系であるため、最大Lyapunov指数のみで、この初期時間領域を決められるわけではない。

図5は、2時間相関関数を $t=0-\tau_i$ の初期時間領域で、代数型減衰関数(12)で近似したものである。

近似した代数型減衰関数は、次の(14)式である。第1項は振動数 ω_1 で代数的に減衰する項である。フィッティングを行った結果、振動数0.840は、パワースペクトルのピーク $\omega_1=0.799$ から少しずれている。第2項は、振動数 ω_0 で代

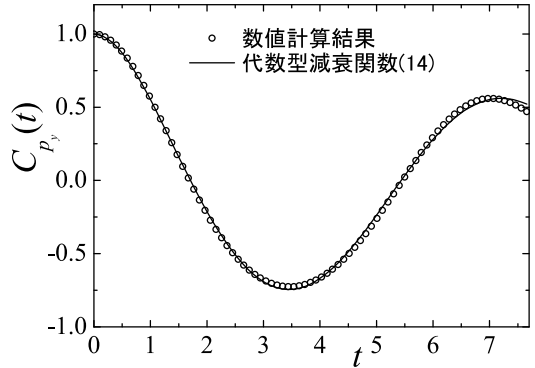


図5： $E=1/6$ における p_y の2時間相関関数の初期時間領域における代数型減衰関数近似(14)

数的に減衰する項である。第3項は、図4(a)のパワースペクトルで見られたラインスペクトルに対応する振動項である。振動数1.130はパワースペクトルのピーク $\omega_0=1.002$ から少しずれている。

$$C_{p_y}(t) = \frac{0.766}{1 + (0.083t)^2} \cos(0.840t + 0.113) + \frac{0.242}{1 + (0.578t)^2} \cos(1.130t - 0.207) - 0.002 \cos(t + 2.559) \quad (14)$$

次に、終期時間領域の始めの時間 τ_f の目安として、図4(a), (b)の $p_y(t)$ のパワースペクトルのピークの関数形より、 $p_y(t)$ の2時間相関関数の振動数 ω_0 の減衰係数 $\gamma_0=0.025$ と振動数 ω_1 の減衰係数 $\gamma_1=0.030$ より、相関時間は、減衰係数の逆数であることから、振動数 ω_0 では40.0、振動数 ω_1 では33.3となり、 $\tau_f=40.0$ と見積もれる。図6は、 $E=1/6$ における p_y の2時間相関関数の終期時間領域における数値計算結果と指数型減衰関数近似曲線との比較である。 t が大きくなるに従い、フィッティングが良くなるのがわかる。

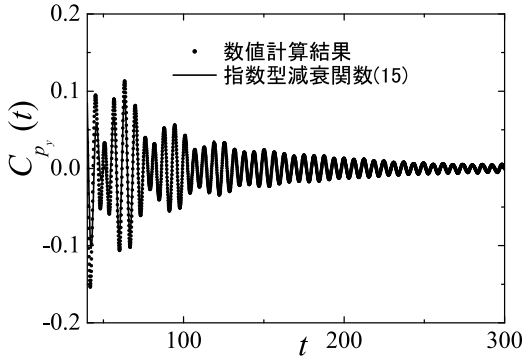


図6： $E=1/6$ における p_y の2時間相関関数の終期時間領域における指数型減衰関数近似(15)

近似した指数型減衰関数は、次の(15)式である。第1項は振動数 ω_1 で指数的に減衰する項である。第2項は、振動数 ω_0 で指数的に減衰する項である。第3項は、図4(a)のパワースペクトルで見られたラインスペクトルに対応する振動項である。

$$C_{p_y}(t) = 0.269 \exp[-0.030t] \cos(0.799t - 6.378) + 0.095 \exp[-0.010t] \cos(1.017t - 1.604) - 0.002 \cos(t + 2.559) \quad (15)$$

図7は、数値計算結果に代数型減衰関数(14)と指数型減衰関数(15)を重ねた図である。

代数型減衰関数(14)は、 $t < \tau_i$ では合っているが $t > \tau_i$ では、ずれていることがわかる。一方、指数型減衰関数(15)は、 $t > \tau_f$ で合ってくる事がわかる。

6. まとめと今後の課題

本稿では、保存力学系でカオス解をもつ典型的なモデルであるHénon-Heiles系のカオス軌道の統計的性質を数値計算により調べた。Hénon-Heiles系は、エネルギー積分 E が大きくなるに従い、相空間上でのカオス解をもつカオスの海の領域が広がる。相空間上でのカオ

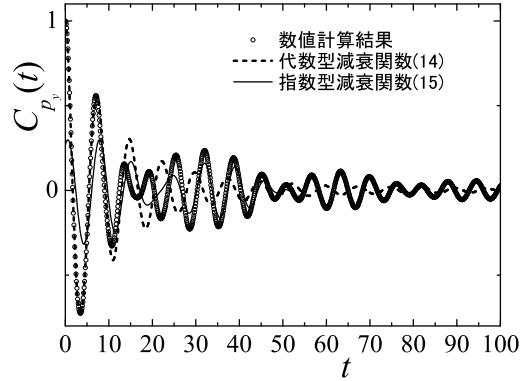


図7：初期時間領域でフィットさせた代数型減衰関数(14)と終期時間領域でフィットさせた指数型減衰関数(15)

スの海の領域内に初期値 $\vec{X}(0)$ をとり、軌道の2時間相関関数の統計性を数値的に調べた。特に、非線形性が最も強いパラメータ $E=1/6$ における2つの力学変数 p_y, y について2時間相関関数を数値的に求めた。

力学変数 p_y, y の2時間相関関数は、振動しながら減衰する(図2(a), (b))。2時間相関関数の振動数や減衰形を調べるために、 p_y, y のパワースペクトルのピーク付近の構造を調べた。パワースペクトル $I_{p_y}(\omega)$ には、 $\omega = \omega_0, \omega_1$ の2つに、パワースペクトル $I_y(\omega)$ には、 $\omega = \omega'_0, \omega'_1, \omega'_2$ の3つにピークがあらわれた(図3(a), (b))。そこで、 $I_y(\omega)$ よりもパワースペクトルのピーク数が1つ少ない $I_{p_y}(\omega)$ のピーク構造に着目し、2時間相関関数の減衰形との関連を考察した。

$I_{p_y}(\omega)$ の $\omega = \omega_0$ 付近と、 $\omega = \omega_1$ 付近のピーク構造は、(8), (9)式の非対称ローレンチアンの近似式とよく一致した。但し、 $\omega = \omega_0$ では、ラインスペクトルを示唆しているずれが見られた。(8), (9)式の非対称ローレンチアンは、2時間相関関数では振動型の指数関数的減衰(10), (11)

に対応している。

カオス軌道は、初期の時間領域では、決定論的な性質が支配的であり、終期の時間領域では、確率論的でランダムな性質が支配的となる性質がある。そこで、この2つの時間領域に分けて、2時間相関関数の減衰形を考察した。その結果、 p_y の2時間相関関数の減衰形は、 $t < \tau_i$ では代数型減衰関数(14)、 $t > \tau_f$ では指数型減衰関数(15)でフィットさせることができた。

終期時間領域を決める τ_f の見積もりは、パワースペクトルのピーク近傍の関数形から決定したのは良いとして、初期時間領域を決める τ_i の見積もりが、最大Lyapunov指数から決定した点や初期時間領域が非常に短いため、この点は、今後の課題である。また、初期時間領域から終期時間領域との間の中間領域 ($\tau_i < t < \tau_f$) では、代数型減衰関数(14)とも、指数型減衰関数(15)ともずれがみられ、初期時間領域から終期時間領域への遷移をどのように特徴づければよいのかという課題が残されている。

最近、射影演算子法を援用してカオス解をもつ決定論的な微分方程式を非マルコフな線形確率微分方程式に変換し、線形確率微分方程式の核となる記憶関数を数値的に求め、2時間相関関数やパワースペクトルを分析する研究が行われている[16], [18], [19], [20], [21], [22]。特に、森、岡村らは、記憶関数の分析より蔵本-Sivashinsky(KS)方程式における状態変数の2時間相関関数は、初期の時間範囲では、時間に可逆な代数型減衰と長時間後の時間範囲では、時間に不可逆な指数型減衰からなること、パワースペクトルは、ピーク付近が時間に不可逆な指数型減衰を示すローレンツ型ピークとピークの裾野が時間に可逆な代数型減衰を示す指数型ウィングからなることを示した[23]、

[24]。Hénon-Heiles系のカオス軌道の2時間相関関数の減衰形の考察には、記憶関数の分析も興味深いテーマである。

参考文献

- [1] A. J. Lichtenberg and M. A. Leiberman, *Regular and Chaotic Dynamics*: Springer-Verlag, New York, 1992.
- [2] H. Mori and Y. Kuramoto, *Dissipative Structures and Chaos*: Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [3] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*: Cambridge University Press, 2002.
- [4] 大貫義郎・吉田春夫, *力学(岩波講座 現代の物理学)*: 岩波書店, 1997.
- [5] A. N. Kolmogorov, "On the conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function," *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol.98, pp.525-530, 1954.
- [6] V. I. Arnold, "Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics," *Russian Math. Surveys*, vol.18, no.6, pp.85-19, 1963.
- [7] J. K. Moser, "Convergent series expansions for quasi-periodic motions," *Math. Ann.*, vol.169, pp.136-176, 1967.
- [8] 井上政義・秦浩起, *カオス科学の基礎と展開—複雑系の理解に向けて—*: 共立出版, 1999.
- [9] R. Ishizaki, T. Horita, T. Kobayashi and H. Mori, "Anomalous Diffusion Due to Accelerator Modes in the Standard Map," *Prog. Theor. Phys.*, vol.85, pp.1013-1022, 1991.
- [10] R. Ishizaki, T. Horita and H. Mori, "Anomalous Diffusion and Mixing of Chaotic Orbits in Hamiltonian Dynamical Systems," *Prog. Theor. Phys.*, vol.89, pp.947-963, 1993.

- [11] 石崎龍二, “Hénon-Heiles系におけるカオス軌道の統計的性質,” *福岡県立大学人間社会学部紀要*, vol.16, no.2, pp.15-27, 2008.
- [12] 石崎龍二, “Hénon-Heiles系におけるカオスのパワースペクトルのピーク構造,” *福岡県立大学人間社会学部紀要*, vol.17, no.1, pp.29-43, 2008.
- [13] M. Hénon and C. Heiles, “The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments,” *Astron. J.*, vol.69, pp.73-79, 1964.
- [14] E. Forest, in *AIP Conference Proceedings*, vol.184, 1989, pp.1106-1136.
- [15] E. Forest and R. D. Ruth, “Fourth order symplectic integration,” *Physica D*, vol.43, pp.105-117, 1990.
- [16] H. Mori, S. Kuroki, H. Tominaga, R. Ishizaki and N. Mori, “Memory Function Approach to Chaos and Turbulence and the Continued Fraction Expansion,” *Prog. Theor. Phys.*, vol.111, pp.635-660, 2004.
- [17] R. Kubo, M. Toda and N. Hashitsume, *Statistical Physics II*, 2nd ed.: Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [18] H. Mori, S. Kuroki, H. Tominaga, R. Ishizaki and N. Mori, “Randomization and Memory Functions of Chaos and Turbulence,” *Prog. Theor. Phys.*, vol.109, pp.333-355, 2003.
- [19] H. Tominaga, S. Kuroki and H. Mori, “Time Correlations and Power Spectra of the Duffing Equation,” *Prog. Theor. Phys.*, vol.109, pp.575-589, 2003.
- [20] R. Ishizaki, S. Kuroki, H. Tominaga, N. Mori and H. Mori, “Time Correlations and Diffusion of a Conservative Forced Pendulum,” *Prog. Theor. Phys.*, vol.109, pp.169-186, 2003.
- [21] R. Ishizaki, H. Mori, H. Tominaga, S. Kuroki and N. Mori, “The Memory Function and Chaos-Induced Friction in the Chaotic Hénon-Heiles System,” *Prog. Theor. Phys.*, vol.116, pp.1051-1067, 2006.
- [22] H. Tominaga, H. Mori, R. Ishizaki, N. Mori and S. Kuroki, “Memory Spectra and Lorentzian Power Spectra of the Chaotic Duffing Oscillator,” *Progress of Theoretical Physics*, vol.120, no.4, pp.635-657, 2008.
- [23] H. Mori and M. Okamura, “Dynamic structures of the time correlation functions of chaotic nonequilibrium fluctuations,” *Phys. Rev. E*, vol.76, p.061104[9 pages], 2007.
- [24] H. Mori and M. Okamura, “Dual structures of chaos and turbulence, and their dynamic scaling laws,” *Phys. Rev. E*, vol.80, p.051124[7 pages], 2009.